

II. *Solutio Generalis Problematis XV. propositi à D. de Moivre, in tractatu de Mensura Sortis inserto Actis Philosophicis Anglicanis No 329. pro numero quocunque Collusorum: per D. Nicolaum Bernoulli, Basiliensem, Reg. Soc. Sodalem.*

CUM Methodus synthetica, quâ usus est *D. de Moivre* ad inveniendam cujusque Collusoris sortem, in usum verti nequeat tunc quando plures quam tres sunt collusores, ob vix perspiciendam legem progressionis serierum quæ se offerunt; ostendam hic quo modo Analysis in ejusmodi Problematis, ubi depositum continuo augetur, adhiberi queat: eumque in finem demonstrationem dabo analyticam trium Theorematum, quæ inveni, & quidem diu ante visum *D. Moivre* libellum de Mensura Sortis, occasione triplicis quæstionis mihi ab amico circa ludum hunc, quem Galli vocant *le Jeu de la Poule*, propositæ, pro inveniendis scil. probabilitate vincendi, lucro item vel damno cujusque Collusoris, & duratione certaminis.

THEOREMA I.

Si Collusores aliquot *A, B, C, D, E, &c.* quorum numerus est $n+1$ & dexteritates sunt æquales, deponant singuli 1, & istis conditionibus certent. 1°. Ut illorum duo *A & B* ludum incipiant. 2°. Ut victus locum suum tertio *C* cedat, ita ut ille tertius *C* jam cum victore contendat, quique ex hoc certamine victor evaserit cum quarto *D* ludat, & ita deinceps. 3°. Ut ille depositum totum obtineat, qui omnes collusores successivè vicerit. Dico probabilitates vincendi duorum quorumlibet collusorum sese immediate in ordine ludendi sequentium esse in ratione $1+2^n$ ad 2^n , adeoque expectationes lusorum *A (B), C, D, E, &c.* esse in progressionem Geometricam.

Demonstratio.

Ponantur expectationes vincendi ipsius A vel $B = a$, ipsius $C = c$, ipsius $D = d$, ipsius $E = e$, &c. Porro cum accidere possit, ut collusor aliquis prima vice in ludum intrans inveniatur adversarium qui vel nondum, vel semel, vel bis, vel ter, &c. jam successive victor extitit, vocetur expectatio lusoris illius primo casu $= z$, secundo $= y$, tertio $= x$, quarto $= u$, quinto $= t$, &c. Item cum collusor aliquis vinci possit ab adversario qui antea jam vel nullum, vel unum, vel duos, vel tres, &c. collusores successive vicit, ita ut exiens è ludo relinquatur adversarium qui vel semel, vel bis, vel ter, vel quater &c. victor extitit, vocetur expectatio seu probabilitas vincendi ejus qui exit è ludo primo casu $= b$, secundo $= k$, tertio $= l$, quarto $= m$, &c. Hisce omnibus positis habebuntur sequentes novem series æquationum signatæ N°. 1. N°. 2. N°. 3, &c. usque ad N°. 9. *Tab. I.* Ratio eas inveniendi breviter hæc est.

Inter æquationes N. 1°. reperitur *ex. gr.* $f = \frac{1}{8}t + \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}x$

$+ \frac{1}{2}y$. Nam collusor F certabit vel cum collusore A , vel B ,

vel C , vel D , vel E : ut primum vel secundum contingat, oportet ut vel A vel B quater successive victor existat, cujus even-

tus probabilitas est $\frac{2}{16}$ seu $\frac{1}{8}$: Ut tertium contingat oportet ut C ter victor existat, cujus eventus probabilitas est eti-

am $\frac{1}{8}$: Ut quartum contingat oportet ut D bis successive vin-

cat, quod probabilitatem habet $\frac{1}{4}$; Ut quintum contingat,

oportet ut E semel vincat, cujus eventus probabilitas est $\frac{1}{2}$;

ergo

ergo lusoris F probabilitas vincendi est $= \frac{1}{8} z + \frac{1}{8} u + \frac{1}{4} x$
 $+ \frac{1}{2} y$. Sic inter æquationes No. 2. est, *ex. gr.* $x = \frac{1}{2} l$

$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{2^n} \times b + \frac{1}{2^n} \times 1$. Collusor enim
 qui certat cum adversario qui jam bis successive victor extitit,
 vincere potest vel omnes collusores, vel aliquos, vel nullum.

Prioris eventus probabilitas est $\frac{1}{2^n}$, secundi $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$
 $\dots + \frac{1}{2^n}$, & tertii $\frac{1}{2}$; si primus eventus contingat, probabilitas

vincendi evadit certitudo integra seu 1; si secundus, exit è lu-
 do relinquens collusorem qui semel vicit; si tertius, exit è
 ludo relinquens collusorem qui ter successive vicit; adeoque

fors ejus totalis est $\frac{1}{2} \times l + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots - \frac{1}{2^n} \times b + \frac{1}{2^n} \times 1$.

Simili ratiocinio inveniuntur æquationes N°. 3. Collu-
 sor enim qui victus ab adversario exit è ludo, relinquens *ex. gr.*
 collusorem unius tantum ludi victorem, acquirit sortem vel
 ipsius C , vel ipsius D , vel ipsius E , vel ipsius F , &c. prout
 adversarius à quo victus est vincit vel omnes collusores præter
 unum, vel omnes præter duos, vel omnes præter tres, &c.

unde sequitur quod $b = \frac{1}{2^{n-1}} \times c + \frac{1}{2^{n-2}} \times d + \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}}$

$\times f + \&c$. Æquationes N°. 4. inveniuntur subtrahendo æqua-
 tiones N°. 2. ab invicem: & æquationes N°. 5. subtrahendo
 æquationes N°. 3. ab invicem. Æquationes N°. 6. inveni-
 untur substituendo in æquationibus N°. 4. valores inventos
 per æquationes N°. 5. Æquationes N°. 7. inveniuntur quæ-
 rendo valores ipsarum z, y, x, u , &c. per æquationes N°. 1.
 Et his valoribus substitutis in æquationibus N°. 4. habebuntur
 æquationes No. 8, quæ comparatæ cum æquationibus N°. 6.

dant æquationes N^o. 9. ex quibus sequitur quod $1 + 2^n : 2^n :: a : c :: c : d :: d : e$, &c. *Q. E. D.*

Corollarium.

Hinc faciliè inveniuntur probabilitates vincendi singulorum Collusorum, quas habent tum ante ludum inceptum, tum in quolibet statu in quem ludum prosequendo pervenire possunt. Si sint, *ex gr.* tres collusores *A, B, C*, erit $n = 2$, & $1 + 2^n : 2^n :: 5 : 4 :: a : c$: id est, probabilitates vincendi ipsorum *A, B, C*, antequam *A* vicerit *B*, vel *B* vicerit *A*, se habent ut numeri

5, 5, 4, adeoque ipsæ probabilitates sunt $\frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{4}{14}$: omnes enim simul sumptæ facere debent 1 seu certitudinem integram.

Postquam *A* vicerit *B*, probabilitates vincendi ipsorum *B, C, A*, erunt *b, y* seu *c*, & (quia *A* æqualem habet expectationem ad victoriam, & ad sortem ipsius *B* obtinendam) $\frac{1+b}{2}$ respectivè,

hoc est, quia per æq. 1. N^o. 3. $b = \frac{1}{2^{n-1}} \times c = \frac{1}{2} c$, & $c = \frac{4}{14} =$

$\frac{2}{7}$ ut modo inventum, hæc probabilitates erunt $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}$, ut

D. de Moivre invenit Coroll. 1. Prop. 15. pag. 242.

Si sint quatuor collusores *A, B, C, D*, erit $n = 3$, & $1 + 2^n : 2^n :: 9, 8$, adeoque probabilitates collusorum ab initio ludi erunt ut 9, 9, 8, $\frac{8 \times 8}{9}$, sive ut 81, 81, 72, 64, hoc est, ipsæ *a, a,*

c, d, erunt $\frac{81}{298}, \frac{81}{298}, \frac{72}{298}$ & $\frac{64}{298}$. Postquam *A* vicerit *B*, pro-

babilitates ipsorum *B, D, C, A*, erunt *b, d, c*, $\frac{1+3b}{4}$, est au-

tem per æq. 1. N^o. 3. $b = \frac{1}{2^{n-1}} \times c + \frac{1}{2^{n-2}} \times d = \frac{1}{4} c + \frac{1}{2} d$,

$e = \frac{72}{298} = \frac{36}{149}$, & $d = \frac{64}{298} = \frac{32}{149}$, ut modo inventum :

ergo hæ probabilitates erunt $\frac{25}{149}$, $\frac{32}{149}$, $\frac{36}{149}$, $\frac{56}{149}$ respective.

Postquam A vicerit B & C , probabilitates vincendi ipsorum C, B, D, A , erunt k , $\frac{e}{2}$, x , $\frac{1+b}{2}$, seu (quia per æq. 2. N°. 3.

$k = \frac{1}{2^{n+2}} \times d = \frac{1}{2} d$, & per æq. 3. N°. 7. $x = 2d - c$) $\frac{16}{149}$, $\frac{18}{149}$, $\frac{28}{149}$, $\frac{87}{149}$. Et nota quod calculi bonitas confirmetur ex eo,

quod summæ harum probabilitatum, *hoc est*, $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$ in

priori exemplo, & $\frac{25}{149} + \frac{32}{149} + \frac{36}{149} + \frac{56}{149}$, nec non $\frac{16}{149} + \frac{18}{149} + \frac{28}{149} + \frac{87}{149}$ in posteriori exemplo, singulæ sint = 1 seu certitudini integræ.

THEOREMA II.

Positis quæ prius & insuper hac conditione, ut victus semper mulctetur summa p , quæ deposito augendo inferviat ; quod depositum sic gradatim auctum illi soli cedat, qui omnium successive collusorum victor extiterit ; denotatis etiam ut antea per literas minúsculas a, c, d, e , &c. probabilitatibus vincendi ipsorum A (vel B), C, D, E , &c. respective : per easdem vero literas majúsculas A, C, D, E , &c. ipsorum A (vel B), C, D, E , &c. expectationibus, *hoc est*, portíonibus depositi

quas singuli expectant : Dico, fore semper $C = \frac{A + ap \times 2^n - ncp}{1 + 2^n}$

X

D=

$$D = \frac{C + c p \times 2^n - n d p}{1 + 2^n}, E = \frac{D + d p \times 2^n - n e p}{1 + 2^n}, \&c.$$

Demonstratio.

Denotetur ut prius per literas minuscultas *z, y, x, u, t, &c.* probabilitas vincendi ludentis cum adversario, qui jam vel nullum, vel unum, vel duos, &c. collusores successive vicit; per easdem vero literas majusculas *Z, Y, X, U, T, &c.* ejus expectatio, quam scilicet habet diversis illis casibus, deposito existente $n+1, n+1+p, n+1+2p, n+1+3p, \&c.$ respectivè. Sic etiam per literas minuscultas *h, k, l, m, &c.* denotetur probabilitas vincendi lusoris victi ab adversario, qui antea vel nullum, vel unum, vel duos, &c. collusores successive vicerat; quemadmodum per literas majusculas *H, K, L, M, &c.* ejusdem expectatio diversis illis casibus, deposito existente $n+1+p, n+1+2p, n+1+3p, \&c.$ respectivè. His positis iisdem quibus antea ratiociniis invenientur sequentes duodecim æquationum series in *Tab. II.* signatæ N°. 1. N°. 2. N°. 3, &c. Inter

æquationes N°. 1. ex. gr. est $E = \frac{U}{4} + \frac{X+xp}{4} + \frac{T+2yp}{2}.$

Lusor enim *E* ludet vel cum lusore *A*, vel lusore *B*, vel *C*, vel *D*. Si ludit cum *A* vel *B*, expectatio ejus erit $= U$, quia ludit cum adversario qui jam tres adversarios vicit, deposito existente $n+1+3p$. Si ludit cum lusore *C*, expectatio ejus erit $= X+xp$, ludit enim cum adversario qui jam duos collusores vicit, adeoque si depositum esset $n+1+2p$ ejus expectatio esset $= X$: verum quia ludente *E* depositum est $= n+1+3p$, ob tres collusores victos & summa p multatos, addenda est expectationi *X* portio illa multæ unius p , quam lusor *E* sperare potest: est autem hæc portio (quia probabilitas ejus vincendi est x) $= xp$, ejus igitur expectatio totalis tunc erit $= X+xp$. Sic si ludit cum lusore *D*, expectatio ejus erit $= T+2yp$: additur ad *T* (quæ esset ejus expectatio deposito existente $n+1+p$) portio $2yp$, quæ ipsi debetur de duabus multis

multis $2p$, quibus depositum $n + 1 + 3p$ majus est quam $n + 1 + p$. Simili modo habentur æquationes N°. 2. 3. 4. & 5. Substituendo autem primam æquationem N°. 2. *Tab. I.* in æquationibus N°. 4. habentur æquationes N°. 6. Et substituendo primam æquationem N°. 3. *Tab. I.* in æquationibus N°. 5. habentur æquationes N°. 7. quibus dein in æquationibus No 6. substitutis habentur æquationes No. 8. Æquationes N°. 9. inveniuntur quærendo valores ipsarum Z, T, X, U , &c per æquationes N°. 1. *Tab. I.* & II. vel N°. 2. *Tab. II.* & N°. 7. *Tab. I.* Et his valoribus substitutis in æquationibus N°. 4. habentur æquationes N°. 10. Quæ comparatæ cum æquationibus N°. 8 (in quibus pro z substituatur a , per 1. æq. *Tab. I.*) dant æquationes N°. 11. Et hæ æquationes N°. 11. comparatæ cum æquationibus N°. 9. *Tab. I.* dant æquationes N°. 12, quæ constituunt Theorema, quod demonstrandum erat.

Corollarium.

Hinc quoque facile inveniuntur singulorum Collusorum sortes seu expectationes, ipsorumque adeo lucra vel damna.

Sint *ex. gr.* tres collusores A, B, C : erit $C = \frac{A + ap \times 2^n - ncp}{1 + 2^n}$

$$= (\text{ob } n = 2) \frac{4A + 4ap - 2cp}{5} = (\text{ob } a = \frac{5}{14} \text{ \& } c = \frac{2}{7})$$

per coroll. Theor. 1.) $\frac{4A + \frac{6}{5}p}{5}$. Unde cum omnium trium

expectationes simul sumptæ, *id est*, $A + A + C$ æquare debeant id quod ab initio depositum fuit, *id est* 3, erit $2A + \frac{4A + \frac{6}{5}p}{5} = \frac{14A + \frac{6}{5}p}{5} = 3$, & $14A = 15 - \frac{6}{5}p$, &

$A = \frac{15}{14} - \frac{3}{49}p =$ expectationi lusoris A vel B : proinde C

expectatio lusoris tertii $C = \frac{4A + \frac{6}{5}p}{5} = \frac{6}{7} + \frac{6}{49}p$. A quibus

bus expectationibus si subtrahatur 1, id quod ab initio singuli deposuerunt, remanebit ibi $\frac{1}{14} - \frac{3}{49} p$, hic $\frac{6}{49} p - \frac{1}{7}$; quemadmodum D. de Moivre invenit. Exempl. 2. Sint collutores 4, A, B, C, D, erit $C = \frac{A + ap \times 2^n - ncp}{1 + 2^n} = (\text{ob } n=3)$

$$\frac{8A + 8ap - 3cp}{9} = (\text{ob } a = \frac{81}{298} \text{ \& } c = \frac{36}{149}, \text{ per coroll.})$$

$$\text{Theor. 1.) } \frac{8A + \frac{216}{149}p}{9}; \text{ item } D = \frac{C + cp \times 2^n - ndp}{1 + 2^n} =$$

$$\frac{8C + 8cp - 3dp}{9} = (\text{ob } d = \frac{32}{149} \text{ per id. corr.}) \frac{8C + \frac{102}{149}p}{9} =$$

$$\frac{64A + \frac{3456}{149}p}{81}; \text{ unde habebitur æquatio } 2A + C + D = 2A +$$

$$\frac{8A + \frac{216}{149}p}{9} + \frac{64A + \frac{3456}{149}p}{9} = \frac{298A + \frac{1600}{149}p}{81} = 4, \text{ sive } 149A$$

$$+ \frac{2700}{149}p = 162, \text{ \& } A = \frac{162}{149} - \frac{2700}{22201}p. \text{ Hinc } C =$$

$$\frac{8A + \frac{216}{149}p}{9} = \frac{144}{149} + \frac{1176}{22201}p, \text{ \& } D = \frac{64A + \frac{102}{149}p}{81} = \frac{128}{149}$$

$$+ \frac{4224}{22201}p. \text{ Subtracta autem unitate 1, quam singuli ab ini-$$

$$\text{tio ludi deposuerunt, remanebit } \frac{13}{149} - \frac{2700}{22201}p \text{ pro lusore}$$

$$A \text{ vel } B, \frac{1176}{22201}p - \frac{5}{149} \text{ pro } C, \text{ \& } \frac{4224}{22201}p - \frac{21}{149} \text{ pro } D;$$

quæ singula indigitabunt lucrum vel damnum, prout pars affirmata præpollet negatæ, vel contra. Simili ratione habebuntur etiam sortes quas acquirunt in quolibet statu in quem ludum prosequendo pervenire possunt.

THEOREMA 3.

Positis quæ prius, si adsint spectatores $\mathcal{Q}, R, S, T, U$, &c. quorum numerus sit n unitate minor quam numerus collusorum, quorumque prior $\mathcal{Q}$ affirmet certamen finitum iri post $n+p$ ludos peractos, R post $n+p-1$, S post $n+p-2$, T post $n+p-3$, U post $n+p-4$, &c. præcise, non antea; sintque q, r, s, t, u , &c. fortes ipsorum $\mathcal{Q}, R, S, T, U$, &c. Dico fore $q = \frac{1}{2} r + \frac{1}{4} s + \frac{1}{8} t + \frac{1}{16} u + \&c.$

Demonstratio.

Vocetur A collusor ille, qui post $n+p$ ludos vincere supponitur: hic intrare debet in ludum post p ludos peractos, & tum ludet contra adversarium, qui jam vel unum vel duos, vel tres, &c. collusores successive vicit. Jam cum, ut primus casus contingat, & ut collusor A omnes suos collusores præter unum, *id est*, $n-1$ collusores successive vincat, æque probabile sit quam ut adversarius ejus vincat $n-1$ collusores, *id est*, (quia jam unius collusoris victor fuit) ut certamen finiat post $n+p-1$ ludos peractos; hujusque eventus probabilitas sit $= r$: erit probabilitas ut collusor A unum adhuc collusorem vincat, *id est*, certamen finiat post $n+p$ ludos $= \frac{1}{2} r$. Sic, ut secundus; casus existat, & ut A omnes collusores præter duos vincat, æque probabile est quam ut certamen finiatur post $n+p-2$ ludos, adeoque ut tunc A vincat adhuc duos collusores, *id est*, ut certamen finiat post $n+p$ ludos, probabilitas erit $= \frac{1}{4} s$. Eodem modo ut, tertio casu existente, A vincat omnes collusores, probabilitas est $= \frac{1}{8} t$; ut quarto $= \frac{1}{16} u$, &c. Quare ut

Y indiffe-

indifferentem certamen finiatur post $n + p$ ludos, probabilitas est

$$\frac{1}{2}r + \frac{1}{4}s + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}u + \&c. = q. \quad \text{Q. E. D.}$$

Corollarium 1.

Facile hinc invenitur quænam sit probabilitas ut certamen finiatur intra datum quemvis ludorum numerum. Series enim fractionum incipientium à fractione $\frac{1}{2^{n-1}}$, quarum denomina-

tores crescant in continua proportionem dupla, numerator autem cujusque fractionis sit summa numeratorum tot fractionum immediate præcedentium quot sunt unitates in $n-1$, dabit omnes successive probabilitates, ut certamen finiatur peractis præcise $n, n+1, n+2, n+3$ &c. ludis: & per consequens si addantur tot termini hujus seriei quot sunt unitates in $p+1$, summa ipsorum exprimet probabilitatem ut certamen finiatur ad minimum ludis $n+p$ peractis. *Ex. gr.* Si sint collusores 4,

adeoque $n=3$, habebitur hæc series $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{16}, \frac{3}{32}, \frac{5}{64}, \frac{8}{128}$

$\frac{13}{256}, \frac{21}{512}$ &c. E qua si fiat alia $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{8}{16}, \frac{19}{32}, \frac{43}{64}, \frac{94}{128}, \frac{201}{256}$,

&c. cujus termini sint summæ terminorum præcedentis seriei, denotabunt iidem termini qualis sit probabilitas ut certamen finiatur ad minimum 3, 4, 5, 6, &c. ludis.

Corollarium 2.

Potest terminus quicunque prioris seriei (excepto primo termino,) ut & summa omnium terminorum, *id est*, terminus quicunque posterioris seriei, per formulam generalem exprimi hoc modo. Si $n+1$ sit numerus collusorum, & p sit numerus terminorum, erit ultimus terminus prioris seriei

$$\frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^n} - \frac{p-n+1}{1 \times 2^{2n}} + \frac{p-2n \times p-2n+3}{1 \times 2 \times 2^{3n}} - \\
& \frac{p-3n \times p-3n+1 \times p-3n+5}{1 \times 2 \times 3 \times 2^{4n}} + \\
& + \frac{p-4n \times p-4n+1 \times p-4n+2 \times p-4n+7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2^{5n}}, -\&c. \text{ Et} \\
& \text{summa omnium terminorum five ultimus terminus posterioris} \\
& \text{seriei} = \frac{p+1}{1 \times 2^n} - \frac{p-n \times p-n+3}{1 \times 2 \times 2^{2n}} + \frac{p-2n \times p-2n+1 \times p-2n+5}{1 \times 2 \times 3 \times 2^{3n}} \\
& - \frac{p-3n \times p-3n+1 \times p-3n+2 \times p-3n+7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2^{4n}} + \&c.
\end{aligned}$$

Tabula I.

Intrat		Exit.		N ^o . 1
Sors		Sors		
0	z	1	h	a = z
1	y	2	k	c = y
2	x	3	l	d = $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$
3	u	4	m	e = $\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$
4	t			f = $\frac{1}{8}t + \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$

N^o. 2.

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{2^n} \times h + \frac{1}{2^n} \times 1 \\
y &= \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{2^n} \times h + \frac{1}{2^n} \times 1. \\
x &= \frac{1}{2}l + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{2^n} \times h + \frac{1}{2^n} \times 1. \\
u &= \frac{1}{2}m + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{2^n} \times h + \frac{1}{2^n} \times 1
\end{aligned}$$

N^o. 3.

$$b = \frac{1}{2^{n-1}} \times c + \frac{1}{2^{n-2}} \times d + \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \dots$$

$$k = \frac{1}{2^{n-2}} \times d + \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \dots$$

$$l = \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \dots$$

$$m = \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \dots$$

N^o. 4.N^o. 6.N^o. 8.

$$z - y = \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} k = \frac{1}{2^n} \times c = a - c$$

$$y - x = \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} l = \frac{1}{2^{n-1}} \times d = 2c - 2d$$

$$x - u = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} m = \frac{1}{2^{n-2}} \times e = 4d - 4e$$

N^o. 5.N^o. 7.N^o. 9.

$$b - k = \frac{1}{2^{n-1}} \times c$$

$$k - l = \frac{1}{2^{n-2}} \times d$$

$$l - m = \frac{1}{2^{n-3}} \times e$$

$$z = a$$

$$y = c$$

$$x = 2d - y = 2d - c$$

$$u = 4e - x - 2y = 4e - 2d - c$$

$$c = a \times \frac{2^n}{1 + 2^n}$$

$$d = c \times \frac{2^n}{1 + 2^n}$$

$$e = d \times \frac{2^n}{1 + 2^n}$$

Corollarium 3.

Potest quis priusquam ludus inchoetur in se suscipere, ut summam $n + 1$ de qua collusores contendunt, & multas omnes pendat, si sibi initio in manus datum sit $n + 1 + 2^{n-1} \times p$.

Demonstrationem duorum præcedentium corollariorum curiosis indagandam relinquo.